Лекция 3. Дискретное преобразование Фурье.

В практических приложениях чаще всего приходится сталкиваться с различными дискретно заданными функциями, к которым также возможно применить аппарат Фурье анализа в его дискретной версии.

Дискретное преобразование Фурье

Рассмотрим преобразование Фурье на множестве сеточных функций

Пусть *f(x)* – заданная непрерывная функция, определенная на отрезке *[0,l]*.

$f_q, q = 0,1,\ldots, N-1, x_0 = 0, x_N = l.$

Периодически продолжим функцию *f(x)* на всю числовую ось, тогда *f(l)=f(0)*, определим точки сетки $x_q = qh = ql/N$. Получим сеточный аналог разложения Фурье. В силу разложения Фурье для периодической функции в точках сетки выполнено

$$f(x_q) = f_q = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n \exp\left(\frac{-i2\pi n x_q}{l}\right)$$

Преобразуем эту сумму. Пусть *n=Np+r, r=0,...N-1.* Тогда сумма может быть представлена в виде:

$$\sum_p \sum_r c_n \exp\left(-i\frac{2\pi(np+r)x_q}{l}\right) = \sum_p \sum_r c_n \exp\left(-i\frac{2\pi(Np+r)ql/N}{l}\right) =$$

$$\sum_p \sum_r c_{Np+r} \exp\left(-i\frac{2\pi rq}{N}\right)\exp(-i2\pi qp) = \sum_{r=0}^{N-1} A_r \exp\left(-i\frac{2\pi rq}{N}\right),$$

где через A_r обозначена сумма $A_r = \sum_{p=-\infty}^{\infty} c_{Np+r}$

Отсюда следует вывод, что если функция задана своими дискретными значениями, то мы можем ее разложить по системе сеточных функций

$$\varphi_r(x_q) = \exp\left(-\frac{2\pi q}{N}\right) = \exp\left(-\frac{2\pi x_q}{l}\right), \quad \mathrm{q} = 0,1,\ldots, \mathrm{N} - 1.$$

Аналогично, мы можем провести разложение по системе $cos(x_q)$ и $sin(x_q)$. Этот факт находится в полном соответствии с выводом линейной алгебры о разложении элемента R^N по системе из N линейно независимых векторов.

В данном случае значения фунций образуют линейно независимую систему векторов. Покажем ортогональность данной системы функций. Рассмотрим скалярное произведение двух функций: $f(x_q)$ и

$$f(x_q) = \sum_{r=0}^{N-1} A_r \exp\left(+i\frac{2\pi rq}{N}\right) \Bigg| \cdot \frac{1}{N}\exp\left(-i\frac{2\pi qs}{N}\right), \quad \mathrm{s} = 0,\ldots \mathrm{N}\text{-}1$$

$$\left(\mathrm{f}, \phi_{\mathrm{s}}\right) = \sum_{q=0}^{N-1}\sum_{n=0}^{N-1} A_n \left[\exp\left(i\frac{2\pi(n-s)}{N}\right)\right]^q.$$

так как при $s \neq n$

$$\sum_{q=0}^{N-1}\left[\exp\left(i\,\frac{2\pi(n-s)}{N}\right)\right]^q=\frac{1-\exp\left(\frac{2\pi i(n-s)}{N}\right)^N}{1-\exp\left(\frac{2\pi i(n-s)}{N}\right)}=\frac{1-\exp\left(2\pi i(n-s)\right)}{1-\exp\left(\frac{2\pi i(n-s)}{N}\right)}=\frac{0}{\ldots}=0,$$

то , таким образом отсюда вытекает формула обращения:

$$A_s=\frac{1}{N}\sum_{q=0}^{N-1} f_q\cdot\exp\left(-i\,\frac{2\pi qs}{N}\right)$$

Из доказательства попутно следует также что

$$\left\langle \phi_s,\phi_s\right\rangle = N,\qquad \left\|\phi_s\right\|=\sqrt{N}.$$